



TITLE:

# 乱流における径路積分の方法とその応用 (統計流体力学の研究)

AUTHOR(S):

田中, 文彦; 中野, 徹

---

CITATION:

田中, 文彦 ...[et al]. 乱流における径路積分の方法とその応用 (統計流体力学の研究). 数理解析研究所講究録 1978, 326: 18-31

ISSUE DATE:

1978-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/104107>

RIGHT:

## 乱流における径路積分の方法とその応用

東大 理 田中文彦

中央大 理工 中野 徹

序 乱流の統計理論は1941年のKolmogorovの現象論(以下K41と呼ぶ)以来苦難の道を歩んでいる。比較的少数(出来れば絶無)の仮定の下に Navier-Stokes 方程式から K41 理論を導出する試みは、この理論の物理的意味を理解する上で理論家の踏み出す第一歩として妥当であると思われる。この立場に沿っては既に Kraichnan グループの注目すべき一連の仕事(以下 DIA 理論と呼ぶ)があるが周知の如く K41 スパクトルを与えない。この困難は二通りの方法で解釈できる。(i) 単に近似の精度が低いために、大きな渦の効果を取り入れ過ぎている。従ってより高次の項を考慮することでこの効果はおさえられる。(ii) 物理的要請から来る処理が欠落しているため第一歩から大きく誤っている。そこで、ここでは比較的簡単と思われる(i)の可能性を吟味する事を目的とする。これに関しては Shut'ko<sup>1)</sup>の論文があるが 単に計算が不

可解であるばかりでなく、近似理論が少なくとも満たさなければならぬ不変性を破っている様に思われる。まず高次計算に必要な擾動論の系統的取扱いの準備から始める。

### § 1. 確率過程の径路積分表示 <sup>\*</sup>

一般に次の形の Langevin 方程式を考える：

$$d\phi_i/dt = V_i(\{\phi\}) + f_i(t), \quad (1)$$

$i$  は場の量中の座標及び空間成分を含めたものとする。  $f_i$  はランダムな揺動力で Markoffian と仮定するが必ずしも Gaussian でなくとも良い：

$$\langle f_i(t) \rangle = 0, \quad \langle f_{i_1}(t_1) \cdots f_{i_m}(t_m) \rangle_c = m! D_{i_1 \cdots i_m} \prod_{j=1}^{m-1} \delta(t_j - t_{j+1}).$$

この定常確率過程は次の特性汎函数により特徴づけられる。

$$\begin{aligned} C[\tilde{\phi}] &\equiv \left\langle \exp i \sum_i \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}_i(t) f_i(t) dt \right\rangle \\ &= \exp \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{i_1 \cdots i_m} \int_{-\infty}^{\infty} D_{i_1 \cdots i_m} (i\tilde{\phi}_{i_1}(t)) \cdots (i\tilde{\phi}_{i_m}(t)) dt \\ &\equiv \exp - \int_{-\infty}^{\infty} K[\tilde{\phi}] dt. \end{aligned} \quad (2)$$

第三行は汎函数  $K$  の定義である。  $f$  の確率分布は  $C$  を逆変換して得られる。これを  $\mathcal{P}[f | -\infty < t < \infty]$  と書くと、

---

<sup>\*</sup>) この方法の起源は古く Onsager <sup>2)</sup> に遡るが近年 Bausch-

Jansen - Wagner <sup>3)</sup> により動的臨界現象に適用され、くり込み群理論の取扱いを簡明にしている。

$$\mathcal{P}[f | -\infty < t < \infty] = \int \mathcal{D}\tilde{\phi}(t) \exp - \int_{-\infty}^{\infty} \{ i \sum_i \tilde{\phi}_i(t) f_i(t) + K[\tilde{\phi}] \} dt. \quad (3)$$

そこで  $\{\phi(t)\}$  の或るひとつの時間発展の径路に対する確率的重みは(3)で独立変数を  $f$  から  $\phi$  に変換すれば得られる;

$$\mathcal{P}[\phi | -\infty < t < \infty] = \mathcal{P}[f | -\infty < t < \infty] \partial(f)/\partial(\phi). \quad (4)$$

ここで  $\partial(f)/\partial(\phi)$  は変換の Jacobian であるが Graham<sup>4)</sup> により最初に

$$\frac{\partial(f)}{\partial(\phi)} = \exp -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_i \frac{\partial V_i}{\partial \phi_i} dt \quad (5)$$

と計算されたが前の  $1/2$  の因子には不定の要素が残り、その後議論されている。<sup>5)</sup> 次節で明らかになるが、Navier-Stokes 方程式の場合 Jacobian は定数になってしまうのでこの問題には立入らない。結局

$$\mathcal{P}[\phi | -\infty < t < \infty] = \int \mathcal{D}\tilde{\phi}(t) \exp J[\tilde{\phi}, \phi], \quad (6)$$

$$J[\tilde{\phi}, \phi] = - \int_{-\infty}^{\infty} \{ i \sum_i \tilde{\phi}_i \left( \frac{d\phi_i}{dt} - V_i(\phi) \right) + K[\tilde{\phi}] + \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial V_i}{\partial \phi_i} \} dt \quad (7)$$

となる。力学系との類推から以下仮に  $J$  を作用積分と呼ぶことにする。ここに登場した  $\tilde{\phi}$  という新しい場が Martin-Siggia-Rose<sup>6)</sup> の  $\hat{\psi}$  演算子の役を果たすが演算子ではないので取扱い易い。

## § 2. Navier-Stokes 方程式

ランダムな揺動力に駆られた非圧縮流体の速度場の方程式を標準的記号で

$$\frac{\partial}{\partial t} u_i(\vec{k}, t) = -\nu k^2 u_i(\vec{k}, t) + M_{ijm}(\vec{k}) \sum_{\vec{q}} u_j(\vec{q}, t) u_m(\vec{k}-\vec{q}, t) + f_i(\vec{k}, t),$$

$$M_{ijm}(\vec{k}) \equiv -\frac{i}{2} (P_{ij}(\vec{k}) k_m + P_{im}(\vec{k}) k_j), \quad P_{ij}(\vec{k}) \equiv \delta_{ij} - k_i k_j / k^2 \quad (8)$$

と書いて出発点とする。空間次元が重要な役割をするかも知れないので  $d$ -次元空間内での運動と考えておく ( $u$  の成分数は必然的に  $d$  となる。) 揺動力は Markoffian で Gaussian と仮定しておく。相関は

$$\langle f_i(\vec{k}, t) f_j(\vec{k}', t') \rangle = 2 P_{ij}(\vec{k}) \delta(\vec{k} + \vec{k}') F(k) \delta(t - t') \quad (9)$$

但し  $k \equiv |\vec{k}|$  (等方的).  $F(k)$  は揺動力の性格により

$$F(k) = \begin{cases} \nu k_B T k^2 & \text{熱揺動} \\ \sim \delta(\vec{k}) \text{型} & \text{外力 (乱流ゆらぎ)} \end{cases} \quad (10)$$

が適切であるだろう。前節での Jacobian を計算すると

$$\sum_{\vec{k}} \delta V_i / \delta u_i(\vec{k}, t) = \sum_{\vec{k}} \{ -\nu k^2 + M_{im}(\vec{k}) u_m(0, t) + M_{ij}(\vec{k}) u_j(0, t) \}$$

$$= \text{const.} \equiv C(\Lambda) \quad (\Lambda; \text{分子論的 cut off})$$

となりこの項の影響は考えなくて良い。時間についても Fourier 変換して

$$J[\tilde{u}, u] = - \sum_{\vec{k}, \omega} P_{ij}(\vec{k}) F(k) \tilde{u}_i(-\vec{k}, -\omega) \tilde{u}_j(\vec{k}, \omega)$$

$$- \sum_{\vec{k}, \omega} (-i\omega + \nu k^2) i \tilde{u}_i(-\vec{k}, -\omega) u_i(\vec{k}, \omega)$$

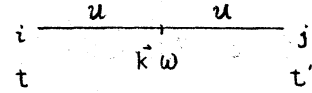
$$- \sum \delta(1+2+3) M_{ijm}(\vec{k}_1) i \tilde{u}_i(1) u_j(2) u_m(3) \quad (11)$$

を得る。ここで  $1 \equiv (\vec{k}_1, \omega_1)$  等略記した。相互作用  $M$  の項を考えない作用積分を  $J_0$  と書くと速度場の非摂動相関函数及び応答函数は  $J_0$  を重みとして簡単に計算できる;

## (i) 相関函数

$$\begin{aligned} \langle u_i(\vec{k}, \omega) u_j(\vec{k}', \omega') \rangle_0 &= \delta(\vec{k} + \vec{k}') \delta(\omega + \omega') \frac{2F(k)}{|-i\omega + \nu k^2|^2} P_{ij}(\hat{k}) \\ &\equiv \delta(\vec{k} + \vec{k}') \delta(\omega + \omega') C_{ij}^{(0)}(\vec{k}, \omega) \end{aligned} \quad (12)$$

となり、これをグラフで

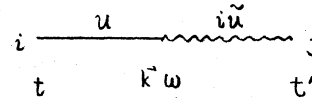


と書いておく。

## (ii) 応答函数

$$\begin{aligned} \langle u_i(\vec{k}, \omega) i\tilde{u}_j(\vec{k}', \omega') \rangle_0 &= \delta(\vec{k} + \vec{k}') \delta(\omega + \omega') \frac{1}{-i\omega + \nu k^2} P_{ij}(\hat{k}) \\ &\equiv \delta(\vec{k} + \vec{k}') \delta(\omega + \omega') \chi_{ij}^{(0)}(\vec{k}, \omega) \end{aligned} \quad (13)$$

同じくグラフで



と記す。

$$\chi_{ij}^{(0)}(\vec{k}, t-t') = \theta(t-t') P_{ij}(\hat{k}) \exp -\nu k^2(t-t')$$

であるから causality  $t > t'$  を満たさなければ 0 である。

この段階での揺動散逸定理は

$$C_{ij}^{(0)}(\vec{k}, \omega) = \frac{2F(k)}{\omega} \text{Im} \chi_{ij}^{(0)}(\vec{k}, \omega) \quad (14)$$

であるが、これが相互作用を考慮した時も成立するか否かは  $F(k)$  の形に依存する。

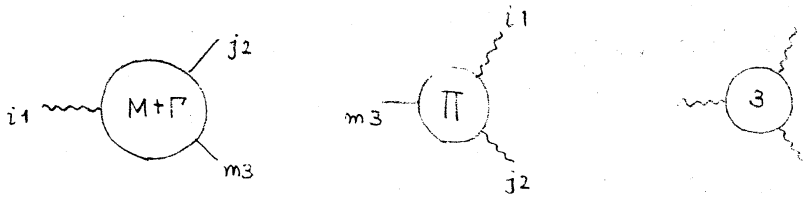
## § 3. 擾動論 I

以上で準備が完了したので、具体的計算を行う前に基本的概念を導入しておく。相互作用の効果を取入れて行くと、 $J_0$  は

次第にくり込まれて

$$\begin{aligned}
 J_{ren}[\tilde{u}, u] = & - \sum_{\vec{k}, \omega} \{ P_{ij}(\vec{k}) F(k) + \Lambda_{ij}(\vec{k}, \omega) \} \tilde{u}_i(-\vec{k}-\omega) \tilde{u}_j(\vec{k}, \omega) \\
 & - \sum_{\vec{k}, \omega} \{ (-i\omega + \nu k^2) \delta_{ij} + \Sigma_{ij}(\vec{k}, \omega) \} i \tilde{u}_i(-\vec{k}-\omega) u_j(\vec{k}, \omega) \\
 & - \sum \delta(1+2+3) \{ M_{ijm}(\vec{k}_1) + \Gamma_{ijm}(1; 2, 3) \} i \tilde{u}_i(1) u_j(2) u_m(3) \\
 & - \sum \delta(1+2+3) \Pi_{ijm}(1, 2; 3) i \tilde{u}_i(1) i \tilde{u}_j(2) u_m(3) \\
 & + \dots
 \end{aligned} \tag{15}$$

となっていくだろう。  $\Sigma_{ij}$  を自己エネルギー,  $\Gamma_{ijm}$ ,  $\Pi_{ijm}$  を結節部分 (vertex parts) と言う。結節部分の完全な組は3種類あって図示すると



となる。以下第三番目の結節部分は議論しない。  $\Sigma_{ij}$  は物理的要請から  $\Sigma_{ij}(\vec{k}, \omega) = P_{ij}(\vec{k}) \Sigma(k, \omega)$  となるがこの  $P_{ij}(\vec{k})$  は後に  $u_j(\vec{k}, \omega)$  があるので  $\delta_{ij}$  と同じことである。これらの函数を用いると、くり込まれた応答函数及び相関函数は

$$\begin{aligned}
 \chi_{ij}(\vec{k}, \omega) &= \frac{P_{ij}(\hat{k})}{-i\omega + \nu k^2 + \Sigma(\vec{k}, \omega)}, \\
 C_{ij}(\vec{k}, \omega) &= \frac{2(F(k) + \Lambda(\vec{k}, \omega))}{|-i\omega + \nu k^2 + \Sigma(\vec{k}, \omega)|^2} P_{ij}(\hat{k}) \equiv C(\vec{k}, \omega) P_{ij}(\hat{k})
 \end{aligned} \tag{16}$$

となる。我々の興味ある物理量エネルギー空間クトルは  $C$  を用いて





$$\lambda_{ij}(\vec{k}, \vec{q}) \equiv -2 M_{iab}(\vec{k}) M_{jcd}(\vec{k}) P_{ab}(\vec{q}) P_{cd}(\vec{k} + \vec{q})$$

(iii) 結節部分

$$\Gamma_{ijm}(1; 2, 3) = \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3}$$

$\Gamma_{ijm}^a(1; 2, 3) \quad \Gamma_{ijm}^b(1; 2, 3) \quad \Gamma_{imj}^b(1; 3, 2)$

$$\Gamma_{ijm}^a(1; 2, 3)$$

$$= \sum_{\vec{q}} \gamma_{ijm}^a(\vec{q}; \{\vec{k}\}) \frac{F(|\vec{q} - \vec{k}_2|) [\omega_1 - i(\nu(\vec{q}) + \nu(\vec{q} + \vec{k}_1) + 2\nu(\vec{q} - \vec{k}_2))]}{\nu(\vec{q} - \vec{k}_2) [-\omega_1 + i(\nu(\vec{q}) + \nu(\vec{q} + \vec{k}_1))] [\omega_2 + i(\nu(\vec{q}) + \nu(\vec{q} - \vec{k}_2))] [\omega_3 + i(\nu(\vec{q} + \vec{k}_1) + \nu(\vec{q} - \vec{k}_2))]}$$

$$\gamma_{ijm}^a(\vec{q}; \{\vec{k}\}) \equiv -4 M_{iab}(\vec{k}_1) M_{ajd}(\vec{q}) M_{bmj}(\vec{q} + \vec{k}_1) P_{dj}(\vec{q} - \vec{k}_2) \quad (22)$$

$$\Gamma_{ijm}^b(1; 2, 3)$$

$$= \sum_{\vec{q}} \gamma_{ijm}^b(\vec{q}; \{\vec{k}\}) \frac{F(|\vec{q} + \vec{k}_1|)}{\nu(\vec{q} + \vec{k}_1) [-\omega_1 + i(\nu(\vec{q}) + \nu(\vec{q} + \vec{k}_1))] [\omega_3 + i(\nu(\vec{q} + \vec{k}_1) + \nu(\vec{q} - \vec{k}_2))]}$$

$$\gamma_{ijm}^b(\vec{q}; \{\vec{k}\}) = -4 M_{iab}(\vec{k}_1) M_{ajd}(\vec{q}) M_{dmj}(\vec{q} - \vec{k}_2) P_{bj}(\vec{q} + \vec{k}_1), \quad (23)$$

以上の結果を「内線の波数」 $> b^{-1}$  と解釈しなおして短波長側からくり込んで行くとすると、ある種のスケール変換の後に Forster - Nelson - Stephen<sup>7)</sup> のくり込み群の漸化式を得ることが出来る。しかしながら我々の興味ある波数領域は波数の相当大きいところで、小さな端の普遍的性質を見ないのであるからこの方法は乱流には適切であるとは思えない。

### § 5. DIA の応答方程式と臨界次元

今、自己エネルギーの結果 (20) を解釈しなおして、内線に用いたプロパゲータが bare なものでなく求めたい本物のものを使ったものとして、これを定める self consistent な方程式 (Hartree 近似) であると思うと

$$\nu k^2 + \bar{\Sigma}(k, \omega) \equiv \nu(k, \omega)$$

に関して Markoff 近似 ( $\omega=0$  のところだけ考える近似) をした後に

$$\nu(k, 0) = \nu k^2 + \sum_{\vec{q}} \sigma_{ii}(\vec{k}, \vec{q}) \frac{F(\vec{q})}{\nu(\vec{q}, 0) [\nu(\vec{q}, 0) + \nu(\vec{k} + \vec{q}, 0)]} \quad (24)$$

という DIA の応答方程式を得る。この解を  $\nu(k, 0) \sim k^z$ ,  $F(k) \sim k^\alpha$  の形で求めたとすると  $\vec{q} \equiv k \vec{x}$ ,  $\vec{k} \equiv k \vec{e}$  と積分波数をスケールして ( $\nu k^2$  の項を無視して)

$$k^z \sim k^{d+2+\alpha-2z} \sum_{\vec{x}} \sigma_{ii}(\vec{e}, \vec{x}) \frac{x^\alpha}{x^z (x^z + |\vec{x} + \vec{e}|^2)} \quad (25)$$

という形になる。もし (19)  $\alpha = -d$  を代入すると、右辺の積分が収束したとすると  $z = 2/3$  従って (17) から  $E(k) \sim k^{-5/3}$  (K41) となるが、困難なことにこの積分は  $x$  の小さいところで

$$x^{d+\alpha-z} \sim x^{-z} \quad (26)$$

と形で発散してしまう。単純に波数の下限  $k_0$  を導入する

と  $k^z \sim k^{d+2+\alpha-2z} (k_0/k)^{-z}$  (即ち  $\alpha = -d$  とすると  $z = 1$ ) となって K41 スポクトルを与えない。Hartree 近似 (24) は 作用積分 (11) を  $\tilde{u}, u$  の 二次形式 で最大限に近似する条件で、変分法の立場から導出することができる。次にこの近似を逐次精密化して行って

$$v(k, 0) \sim k^2 + \text{bubble} + \text{self-energy} + \text{triangle} + \dots \quad (27)$$

と高次項をすべて取り込んで行ったとする。n 次グラフと (n+2) 次グラフとの違いは vertex 数 (2倍) と独立なループ積分 (1倍) だから

$$\frac{(n+1)\text{次グラフ}}{n\text{次グラフ}} \sim \sum_{q, \omega} M^2 \chi^2 C \sim k^{d+2+\alpha-3z} \quad (28)$$

となる。この肩を  $\phi \equiv d+2+\alpha-3z$  と定義すると、  
 $\phi > 0$  の時は  $k \uparrow \infty$  で発散のし方が強くなる (UV 発散)  
 $\phi < 0$  の時は  $k \downarrow 0$  で強くなっていく (IR 発散)。

いずれにせよ  $\phi = 0$  が丁度境目でこれを満たす  $d$  を  $d_c$  (臨界次元) と呼んでいる。 $\alpha = -d$  を認めると、 $z = 2/3$  (K41) は任意の空間次元で critical になっていることが分る。上の級数 (27) を総和すると

$$\begin{aligned} v(k, 0) &\sim k^2 + k^{\phi_0} (1 + k^{\phi} + k^{2\phi} + \dots) \\ &\sim k^2 + \frac{k^{\phi_0}}{1 - k^{\phi}} \sim k^2 + k^{\phi_0 - \phi} \end{aligned}$$

$\phi_0 = d+2+\alpha-2\epsilon$  だから consistent になっている。従って  $K41$  を得るためには 何らかの意味で高次のグラフを考慮する必要があると思われる。また  $K41$  からの補正を  $\epsilon \equiv d_c - d$  という展開パラメータで取り込んでいくことは不可能である。

### §6. Galilei 不変性と Ward 恒等式

高次の計算あるいは非摂動的アプローチを行うときにより処となるのは出発点にとった NS 方程式(8)が持っている基本的性質(不変性)である。§2.でみた様に一般のスペクトル  $F(k)$  を持つ揺動力に対して、揺動散逸定理が成立することは期待されない。(8)の持つ不変性の一つに Galilei 変換に対する不変性がある。これは一定速度で動いている座標系に移り移って流体をみても現象は不変であるということとで、この性質を正確に考慮すると DIA では過大評価しすぎた大きな渦(寿命が長いために観測時間中ほとんど一定構造を持つ)の効果を取り去る可能性があると思われる。速度  $\vec{V}$  で動く座標からみると

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = \vec{x} + \vec{V}t, \quad t \rightarrow t' = t \quad (29)$$

と座標が変換され、速度場は

$$u_i(\vec{x}, t) \rightarrow u'_i(\vec{x}', t') = u_i(\vec{x}, t) + V_i \quad (30)$$

の様に見えるであろう。(30)の Fourier 変換から

$$u_i'(\vec{k}, t) = e^{i(\vec{k} \cdot \vec{V})t} u_i(\vec{k}, t) + V_i S(\vec{k}), \quad (31)$$

$$u_i'(\vec{k}, \omega) = u_i(\vec{k}, \omega - \vec{k} \cdot \vec{V}) + V_i \delta(\vec{k}) \delta(\omega)$$

が得られる。(8)に代入して分る様に NS 方程式は (31) で不変に保たれる。特性汎函数

$$\langle \exp i \sum_{\vec{k}, \omega} \tilde{u}_i(-\vec{k}, -\omega) f_i(\vec{k}, \omega) \rangle$$

は物理的意味から不変でなければならず、 $f_i$  の変換性は  $\tilde{u}_i$  と等しいから

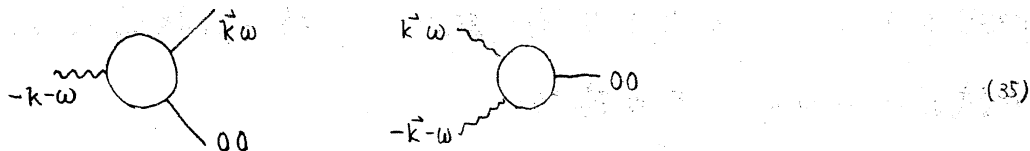
$$\tilde{u}_i'(\vec{k}, \omega) = \tilde{u}_i(\vec{k}, \omega - \vec{k} \cdot \vec{V}) \quad (32)$$

という変換則が見つかる。§3. で出てきた Jren (15) が変換 (31), (32) に対して不変であるという条件を書くと  $V_i \rightarrow 0$  (無限小) として

$$\frac{\partial \Sigma_{ij}(\vec{k}, \omega)}{\partial \omega} k_m + \Gamma_{ijm}(-\vec{k}-\omega; \vec{k}\omega, 00) = 0 \quad (33)$$

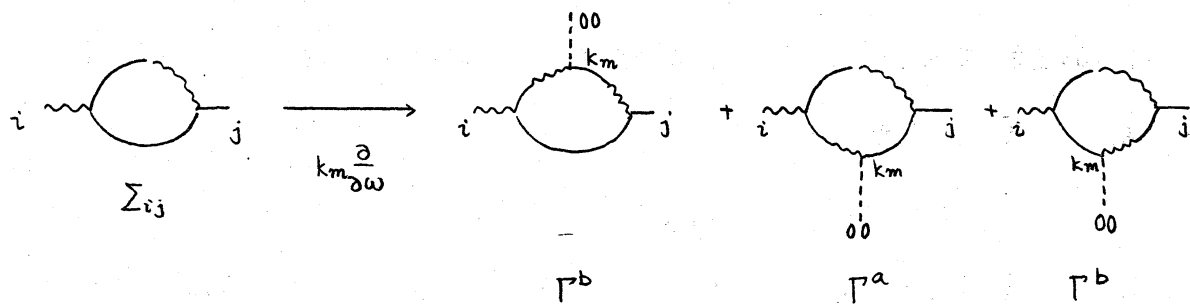
$$\frac{\partial \Lambda_{ij}(\vec{k}, \omega)}{\partial \omega} k_m + \Pi_{ijm}(-\vec{k}-\omega, \vec{k}\omega; 00) = 0 \quad (34)$$

という関係が導かれる。これは vertex 部分の特殊な成分



がそれぞれ対応する自己エネルギーと一定の関係にあるということで、特に (35) は注目する慣性領域の波数  $\vec{k}$  と大きな端

(波数  $\approx 0$ ) との相互作用の dominant 部分になっている。  
DIA では  $\Sigma$  のみを考えて  $\Gamma$  を考えなかったから (33) の  
関係式は成立していない。(33) の直観的解釈は §4. で計算  
しておいた結果を使って容易に理解できる。一般に  $\partial/\partial\omega$   
演算は外線振動数  $\omega$  をパラメータに持つ内線に作用して、一  
本の内線を二本にする。その後  $k_m$  をくっつけるから結局



となり、 $\Gamma$  に一致することが分る。勿論直接 (20) を微分して  
(33) が成立していることは手易く確認できる。

結語： 以上、乱流の統計理論を経路積分表示の立場から統一  
的にふり返ってみた。序で述べた(i)の立場から見れば、以  
上で形式的な枠組はほぼ尽きていると思われる。我々は現在  
(33)式をもとにして大きな渦の取扱いを特に非摂動的な視点か  
ら試みている。その際特に

- 1)  $\Gamma_{ijm}(-\vec{k}, -\omega; \vec{k}\omega, 00)$  は 生の  $M_{ijm}(\vec{k})$  を suppress  
するか？
- 2) K41 で言う『相互作用の局所性』の物理的意味

3)  $k \approx k_0$  の大きな渦の時間発展 (減衰時間は観測の時間にくらべて十分長い) の記憶の継続の効果等を目標にして検討中である。

### 文献

- 1) A.V. Shut'ko, Soviet Phys. Doklady 9 (1965) 857.
- 2) L. Onsager and S. Machlup, Phys. Rev. 91 (1953) 46.
- 3) R. Bausch, H. Jansen and H. Wagner, Z. Physik B24 (1976) 113.
- 4) R. Graham, in "Quantum Statistics in Optics and Solid State Physics" (Springer, Berlin 1973)
- 5) H. Haken, Z. Physik, B24 (1976) 321.
- 6) P. C. Martin, E. D. Siggia and H. A. Rose, Phys. Rev. A8 (1973) 423.
- 7) D. Forster, D. Nelson and M. J. Stephen, Phys. Rev. A16 (1977) 732.